Ejercicios de Análisis Matemático I
Desigualdades y funciones elementales

1. Comprueba que se verifica la igualdad $\left((x+1)-\frac{1}{2}(2x+1)\right)^2 = \left(x-\frac{1}{2}(2x+1)\right)^2$. Por tanto, extrayendo raíces cuadradas, se deduce que $(x+1)-\frac{1}{2}(2x+1) = x-\frac{1}{2}(2x+1)$, esto es $x+1=x$, de donde resulta que $1=0$. ¿Dónde está el error?

2. Estudia los intervalos en los que un trinomio de segundo grado, $p(x)=ax^2+bx+c$, es positivo o negativo. Debes considerar todos los casos posibles según que el trinomio tenga raíces reales o no.

3. Calcula para qué valores de $x\in\mathbb{R}$ se verifica que $\dfrac{2x-3}{x+2}<\dfrac{1}{3}$.

4. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $\dfrac{1-2x}{x^2-4}>\dfrac{1}{2}$.

5. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $x^3(x+2)(x-3)^2(x+1)^5(x+5)^4<0$.

6. Calcula para qué valores de $x\in\mathbb{R}$ se verifica la desigualdad $\dfrac{|x-1|+2}{1+|x^2-5x+6|}<\dfrac{1}{3}$.

7. Supuesto que $0<a<b$, calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{a+b-x}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

8. Calcula para qué valores de $x\in\mathbb{R}$ se verifica que $\left|\dfrac{x^3-5}{x^2-2x-3}\right|\leqslant 1$.

9. Calcula para qué valores de x se verifican las siguientes desigualdades.

   a) $|x+5|<|x-1|$, b) $|x-1|\,|x+2|=3$, c) $|x^2-x|>1$, d) $|x-y+z|=|x|-|z-y|$

10. Calcula para qué valores de x se verifican las siguientes desigualdades.

    a) $|x+1|+|x-1|<1$, b) $|2x-|2x-1||=-2x$, c) $|2+|x+1||<3$.

11. Prueba que cualesquiera sean los números reales positivos $a>0$ y $b>0$ se verifica que
$$\frac{a}{2(a+b)\sqrt{b}}<\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a+b}}.$$

12. Calcula para qué valores de $x\in\mathbb{R}$ se verifica la siguiente desigualdad.
$$\frac{x^2-4x-2}{x^3+1}>0.$$

13. Calcula el dominio natural de definición de la función $f(x)=\sqrt{\log\left(|x-6|(1+|x-3|)\right)}$.

14. Prueba que la función $f:[1/2,+\infty[\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^2-x+1$ para todo $x\geqslant 1/2$, es estrictamente creciente. Calcula la función inversa de f.

15. Calcula el dominio natural de definición de la función $f(x)=\sqrt{-\operatorname{sen} x}+\sqrt{16-x^2}$.

16. Calcula el dominio natural de definición de la función $f(x) = \sqrt{\log \dfrac{x^2 - 8x + 4}{x^2 - 3x + 2}}$.

17. Calcula x sabiendo que:

$$\frac{1}{\log_x(a)} = \frac{1}{\log_b(a)} + \frac{1}{\log_c(a)} + \frac{1}{\log_d(a)}.$$

18. Prueba que para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifican las igualdades siguientes.

$$a)\ \cos(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad b)\ \operatorname{sen}(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

19. Prueba que para todo $x \in [-1, 1]$ se verifica la igualdad

$$\operatorname{arc\,cos} x + \operatorname{arc\,sen} x = \frac{\pi}{2}.$$

20. Prueba que para todo $x \in]-1, 1[$ se verifica la igualdad

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,sen} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

21. *a*) Prueba las igualdades:

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}; \qquad \operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}.$$

b) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a^2 + b^2 = 1$ y $a \neq -1$. Definamos

$$\vartheta = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a+1}$$

Prueba que ϑ es el único número que verifica que $-\pi < \vartheta < \pi$, $\cos\vartheta = a$ y $\operatorname{sen}\vartheta = b$.

22. Sea $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = 2x + 1$. Calcula los valores de x para los que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

23. Prueba las igualdades:

$$\cos a = 4\cos^3(a/3) - 3\cos(a/3) = 2\cos^2(a/2) - 1.$$

Usando que $\cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1$, deduce el valor de $\cos(\pi/6)$, $\cos(\pi/4)$ y $\cos(\pi/8)$.

24. Dado un número entero $n \in \mathbb{Z}$, justifica que la función $f : [n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$, es inyectiva y expresa la inversa de f por medio de la función arcoseno. Representa gráficamente la función $h(x) = \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x)$ para $x \in [-3\pi + \pi/2, 3\pi + \pi/2]$.

25. Justifica, usando las propiedades de la función exponencial, que la función $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada para todo $x \in \mathbb{R}$ por $h(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, es estrictamente creciente. Calcula la función inversa de h.

26. a) Dado $x \in \mathbb{R}$ prueba que hay un único $t \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = x$.

b) Dado $x \geqslant 1$, prueba que hay un único $t \geqslant 0$ tal que $\dfrac{e^t + e^{-t}}{2} = x$.

Sugerencia. Lo que tienes que hacer es calcular t. La sustitución $e^t = u$ te permitirá calcular u.

27. Dado un número $x \neq 0$, calcula un número $t \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{1}{\operatorname{senh} t} = x$.